MODIFIKASI SEDERHANA DARI VARIAN METODE NEWTON UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Supriadi Putra
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Riau, Pekanbaru

ABSTRACT

This article discusses a simple modification of the variants of Newton's method for solving nonlinear equations. Jain (2013) combines the use of the Secant method with Trapezoidal Newton's method developed by Weerakon and Fernando (2000) and produces new combination Secant-Trapezoid Newton method that has fourth-order convergence. Using Jain's idea, the authors combine the use of the Secant method with two other variants of Newton's method developed by Ozban (2004), namely Arithmetic and Harmonic Newton. It turns out that both the new combinations are has fourth-order convergence. Numerical calculation with several examples of nonlinear equations is used to show that both the new combinations method are comparable with other fourth-order methods.

Keywords: *Newton's Method, Secant's Method, Variant of Newton's Methods, Nonlinear Equation, Order of Convergence.*

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear,

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

adalah sebuah topik khusus yang dibahas dalam matakuliah metode numerik baik untuk jurusan pendidikan mipa, sains maupun teknik. Pembahasan biasanya dimulai dari metode dasar seperti : metode Belah dua (*Bisection*), metode Newton, metode Secant, dan lain-lain lihat (Atkinson,1989) dan (Mathew,1987).

Untuk setiap metode kemampuan mahasiswa yang dituntut adalah minimal tiga hal, yaitu : mampu menurunkan formulasi metode iterasi, analisis error (kesalahan metode) untuk melihat orde kekonvergenannya, dan komputasi numerik untuk membandingkan kemampuan metode satu dengan yang lainnya dengan menggunakan beberapa contoh persamaan nonlinear.

Khusus untuk bidang sains, materi lanjutan dari topik menentukan akar persamaan nonlinear biasanya dilakukan dalam matakuliah lain, seperti kapita selekta matematika. Disini mahasiswa akan diberikan penjelasan tentang bagaimana seorang peneliti dapat menemukan sebuah formula baru. Beberapa artikel (terbaru) biasanya digunakan sebagai referensi.

Sebagai contoh misalnya modifikasi metode Newton. Ide modifikasi metode Newton biasanya dilakukan untuk memperbaiki kelemahannya yaitu masih memuat bentuk turunan pertama sehingga memerlukan lebih besar *cost* komputasi ataupun mengkombinasikan pemakaiannya secara bersama-sama dengan metode lain untuk meningkatkan orde kekonvergenannya.

Steffensen (1993) sudah memperbaiki kelemahan metode Newton yang memuat turunan dengan menggunakan pendekatan finite difference. Weerakoon dan Fernando (2000) menggunakan teorema (integral) Newton dan aturan Trapesium untuk meng-aproksimasi integral sehingga diperoleh varian metode Newton dengan orde kekonvergenan kubik. Demikian juga Frontini (2003) dan Ozban (2004) menggunakan ide yang sama dengan Weerakoon dan Fernando yaitu mengaproksimasi integral dengan aturan Midpoint (titik tengah) yang dianalogkan dengan rata-rata Aritmatik dan rata-rata Harmonik sehingga menghasilkan metode dengan orde kekonvergenan kubik. Paling terkini adalah Jain (2013), hanya dengan mengkombinasikan penggunaan metode Secant dan metode yang diusulkan oleh Weerakon dan Fernando, beliau mengusulkan metode dengan orde kekonvergenan empat.

Tujuan Penelitian

Dengan menggunakan ide Jain ini, penulis akan mengkombinasikan pemakaian metode Secant masing-masing dengan metode Aritmatik Newton dan Harmonik Newton sehingga diperoleh kombinasi baru yang akan ditunjukkan memiliki orde kekonvergenan empat dan sebanding dengan metode dengan orde kekonvergenan empat lainnya.

TINJAUAN PUSTAKA

Dua metode numerik dasar yang sering digunakan untuk mencari akar persamaan nonlinear adalah metode Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots \quad (2)$$

yang memiliki orde kekonvergenan kuadratik dan metode Secant,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad (3)$$

yang memiliki orde kekonvergenan superlinear. Kedua metode ini sangat populer terutama metode Newton, sehingga banyak penulis yang tertantang untuk memodifikasinya.

Weerakoon dan Fernando dengan menggunakan teorema Newton

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)dt \quad (4)$$

dan mengaproksimasi nilai integral dengan aturan Trapesium, yaitu

$$\int_{x_n}^{x} f'(t)dt = \left(\frac{x - x_n}{2}\right)\left(f'(x) + f'(x_n)\right) \quad (5)$$

Apabila persamaan (5) ini disubstitusikan ke persamaan (4) akan diperoleh varian lain dari metode Newton yang dikenal dengan nama metode Trapesium Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n^*) + f'(x_n)}, \quad (6)$$

dimana x_n^* dihitung dengan menggu-nakan metode Newton (2). Metode Trapesium Newton ini telah ditunjukkan Weerakoon dan Fernando memiliki orde kekon-vergenan kubik.

Apabila nilai integral diaproksi-masi dengan metode Midpoint (titik tengah), yaitu

$$\int_{x_n}^{x} f'(t)dt = \left(x - x_n\right) f'\left(\frac{x - x_n}{2}\right) \quad (7)$$

Ozban (2004) berhasil memperoleh formula yang dikenal dengan nama metode Midpoint Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n^* + x_n}{2}\right)}, \quad (8)$$

dimana x_n^* dihitung dengan menggu-nakan metode Newton. Metode Midpoint Newton ini juga telah ditunjukkan memiliki orde kekonver-genan kubik.

Perkembangan selanjutnya Jain (2013) mengkombinasikan pengunaan metode Secant (3) dan Trapesium Newton (6) ini dengan bentuk

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n), \qquad (9)$$

dimana

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n^*) + f'(x_n)}, \qquad (10)$$

dan x_n^* dihitung dengan menggunakan metode Newton. Metode ini adalah varian baru dan telah ditunjukkan memiliki orde kekonvergenan empat.

Demikian juga Supriadi (2013) mengkombinasikan penggunaan metode Secant (3) dan Midpoint Newton (8) ini dengan bentuk

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n), \qquad (11)$$

dimana

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n^* + x_n}{2}\right)}, \qquad (12)$$

dan x_n^* dihitung dengan menggunakan metode Newton. Metode ini juga telah ditunjukkan memiliki orde kekonvergenan empat.

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini akan dilakukan melalui kajian literatur terhadap beberapa metode iterasi untuk menyelesaikan persamaan nonlinear (lihat semua refernsi yang digunakan dalam tulisan ini). Selanjutnya metode yang diusulkan akan formulasikan. Untuk meyakinkan metode ini dapat digunakan, maka akan dilakukan kajian teoritis dengan melakukan analisa kekonvergenannya.

Berikut adalah beberapa definisi yang akan digunakan.

Definisi 1

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi real dengan akar sederhana α dan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan real yang konvergen ke α. Orde kekonvergenan dari barisan $\{x_n\}$ adalah p apabila terdapat $p \in R$ sedemikan sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = C \neq 0. \qquad (13)$$

Apabila $p = 1$, sedangkan untuk $p = 2$ dan $p = 3$ maka barisan masing-masing disebut konvergen secara kuadratik dan kubik. Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah *error* pada iterasi ke-*n*, maka relasi

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O\left(e_n^{p+1}\right) \qquad (14)$$

disebut persamaan *error* metode iterasi.

Definisi 2

Misalkan x_{n+1}, x_n, dan x_{n-1} adalah tiga buah nilai iterasi berturut-turut yang dekat dengan α maka orde kekon-vergenan secara komputasi (COC) dapat diaproksimasi dengan

$$COC \cong \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)\right|}. \qquad (15)$$

Untuk mendukung hasil yang diperoleh akan dilakukan uji komputasi terhadap beberapa contoh persamaan nonlinear yang melibatkan beberapa metode dengan orde kekonvergenan empat lain sebagai pembanding.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode yang Diusulkan

Apabila persamaan (6) ditulis dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{(f'(x_n^*) + f'(x_n))/2}, \qquad (16)$$

maka varian dari metode Newton dapat dipandang sebagai rata-rata aritmatik dari $f'(x_n^*)$ dan $f'(x_n)$. Varian ini dikenal dengan metode rata-rata Aritmatik Newton atau disingkat dengan metode Aritmatik Newton.

Demikian juga apabila pada persamaan (16) digunakan rata-rata Harmonik sebagai pengganti rata-rata Aritmatik, akan diperoleh bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n^*) + f'(x_n)\right)}{2f'(x_n^*)f'(x_n)}, \quad (17)$$

maka varian ini dikenal dengan nama metode Rata-rata Harmonik Newton atau disingkat dengan metode Harmonik Newton.

Selanjutnya dengan menggunakan ide Jain, apabila penggunaan metode Trapesium Newton (10) diganti dengan metode Aritmatik Newton (16) dan metode Harmonik Newton (17), akan diperoleh kombinasi baru yaitu

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n), \quad (18)$$

dimana

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{\left(f'(x_n^*) + f'(x_n)\right)/2}, \quad (19)$$

yang diperkenalkan sebagai metode Secant-Aritmatik Newton dan

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n), \quad (20)$$

dimana

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)\left(f'(x_n^*) + f'(x_n)\right)}{2f'(x_n^*)f'(x_n)}, \quad (21)$$

yang diperkenalkan sebagai metode Secant-Harmonik Newton. Pada kedua metode nilai x_n^* dihitung dengan menggunakan metode Newton.

Analisa Kekonvergenan

<u>Teorema 1</u>

Misalkan $f : D \subseteq R \to R$ untuk interval buka *D*. Asumsikan *f* memiliki turunan pertama, kedua dan ketiga dalam interval *D*. Jika $\alpha \in D$ adalah akar sederhana dari fungsi f dan x_0 cukup dekat dengan α maka metode **Secant-Aritmatik Newton** yang diberikan oleh persamaan (19) dan (20) memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = \left(C_2^3 + \tfrac{1}{4}C_3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \quad (22)$$

dimana $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)},\ j = 2,3$ dan $e_n = x_n - \alpha.$

<u>Bukti:</u>

Misalkan e_n dan $\bar{e}_n$ masing-masing adalah *error* untuk x_n dan $\bar{x}_n$, yaitu $x_n = \alpha + e_n$ dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n.$

Karena sesungguhnya metode Trapesium Newton dan Aritmatik Newton adalah dua metode yang sama, maka *error* metode Aritmatik Newton sama dengan *error* metode Trapesium Newton. Akibatnya *error* metode Secant-Aritmatik Newton juga sama dengan *error* metode Secant-Trapesium Newton yang telah ditujukkan oleh Jain yaitu

$$e_{n+1} = \left(C_2^3 + \tfrac{1}{4}C_3\right)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Menggunakan persamaan *error* (14), maka metode Secant-Aritmatik Newton memiliki orde kekonvergenan empat□

<u>Teorema 2</u>

Misalkan $f : D \subseteq R \to R$ untuk interval buka *D*. Asumsikan *f* memiliki turunan pertama, kedua dan ketiga dalam interval *D*. Jika $\alpha \in D$ adalah akar sederhana dari fungsi *f* dan x_0 cukup dekat dengan α maka metode **Secant-Harmonik Newton** yang diberikan oleh persamaan (20) dan (21) memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = \tfrac{1}{2}C_2C_3e_n^4 + O(e_n^5). \quad (23)$$

<u>Bukti:</u>

Misalkan e_n dan $\bar{e}_n$ masing-masing adalah *error* untuk x_n dan $\bar{x}_n$, yaitu $x_n = \alpha + e_n$ dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n.$

Telah ditujukkan oleh Ozban (2004) *error* metode Harmonik Newton (21) adalah

$$\bar{e}_n = \tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (24)$$

dimana

$$C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)},\ j = 2,3 \quad \text{dan}$$

$$e_n = x_n - \alpha.$$

Polinomial Taylor dari $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4)$$

Karena $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$ maka setelah disederhanakan persamaan terakhir menjadi

$$f(x_n) = e_n f'(\alpha)\left(1 + C_2 e_n + C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \qquad (25)$$

Selanjutnya dengan menggunakan (24) diperoleh

$$f(\bar{x}_n) = f(\alpha + \bar{e}_n) = \bar{e}_n f'(\alpha) + O(\bar{e}_n^2)$$

atau

$$f(\bar{x}_n) = \tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 f'(\alpha) + O(e_n^6). \qquad (26)$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (25) dan (26) diperoleh

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_n) - f(x_n) &= \left[\tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 f'(\alpha) + O(e_n^6)\right] \\ &\quad - \left[e_n f'(\alpha)\left(1 + C_2 e_n + C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)\right] \\ &= -e_n f'(\alpha)\left(1 + C_2 e_n - \tfrac{1}{2} C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} &\left[1 + C_2 e_n - \tfrac{1}{2} C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right]^{-1} \\ &= 1 - \left[C_2 e_n - \tfrac{1}{2} C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right] \\ &\quad + \left[C_2 e_n - \tfrac{1}{2} C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right]^2 + O(e_n^3) \\ &= 1 - \left[C_2 e_n - \tfrac{1}{2} C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right] + C_2^2 e_n^2 + O(e_n^3) \\ &= 1 - C_2 e_n + (C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} = -\frac{1}{e_n f'(\alpha)} \times \left[1 - C_2 e_n + (C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)\right] \qquad (27)$$

Kita juga mempunyai hubungan

$$\bar{x}_n - x_n = (\alpha + \bar{e}_n) - (\alpha + e_n) = \bar{e}_n - e_n.$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (24) diperoleh

$$\bar{x}_n - x_n = \tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 - e_n + O(e_n^4). \qquad (28)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (26) - (28) diperoleh

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) \\ &= \left[\tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 - e_n + O(e_n^4)\right] \times \left[\tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 f'(\alpha) + O(e_n^6)\right] \\ &\quad \times \frac{-1}{e_n f'(\alpha)}\left[1 - C_2 e_n + (C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)\right] \\ &= \left[\tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 - e_n + O(e_n^4)\right] \times e_n f'(\alpha)\left[\tfrac{1}{2} C_3 e_n^2 + O(e_n^6)\right] \\ &\quad \times \frac{-1}{e_n f'(\alpha)}\left[1 - C_2 e_n + (C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)\right] \\ &= \left[\tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 - \left(\tfrac{1}{2} C_3\right)^2 e_n^5 + O(e_n^6)\right] \\ &\quad \times \left[1 - C_2 e_n + (C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3) e_n^2 + O(e_n^3)\right]. \end{aligned}$$

atau

$$\frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) = \tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 - \tfrac{1}{2} C_2 C_3 e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (29)$$

Akhirnya diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha \\ &= \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) - \alpha \\ &= (\bar{x}_n - \alpha) - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) \\ &= \bar{e}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n). \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (24) dan (29) ke dalam persamaan terakhir ini akan diperoleh

$$e_{n+1} = \tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 - \left(\tfrac{1}{2} C_3 e_n^3 - \tfrac{1}{2} C_2 C_3 e_n^4 + O(e_n^5)\right)$$

atau

$$e_{n+1} = \tfrac{1}{2} C_2 C_3 e_n^4 + O(e_n^5).$$

Menggunakan persamaan *error* (14), maka metode Secant-Aritmatik Newton memiliki orde kekonvergenan empat□

Uji Komputasi

Pada bagian ini, akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan banyak iterasi (***n***), banyak fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya

(**NOFE**) dan Orde kekonvergenan komputasi (**COC**) untuk metode-metode dengan orde kekonvergenan empat yang dibandingkan. Metode yang dimaksud adalah :

- Metode **STN** : Secant-Trapesium Newton oleh Jain (2013),
- Metode **SMN** : Secant-Midpoint Newton oleh Supriadi (2013),
- Metode **SAN** : Secant-Aritmatik Newton (kombinasi baru) dan
- Metode **SHN** : Secant-Harmonik Newton (kombinasi baru).

Persamaan nonlinear yang digunakan adalah seperti yang juga digunakan oleh Weerakon dan Fernando (2000), yaitu :

1. $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10,$
   dengan $\alpha = 1.365230013414097$
2. $f_2(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1,$
   dengan $\alpha = 1.404491648215341$
3. $f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2,$
   dengan $\alpha = 0.257530285439861$
4. $f_4(x) = \cos(x) - x,$
   dengan $\alpha = 0.739085133215161$
5. $f_5(x) = (x-1)^3 - 1,$
   dengan $\alpha = 2.000000000000000$
6. $f_6(x) = x^3 - 10,$
   dengan $\alpha = 2.154434690031884$
7. $f_7(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5,$
   dengan $\alpha = -1.207647827130919$
8. $f_8(x) = x^2\sin^2(x) + e^{x^2\cos(x)\sin(x)} - 28,$
   dengan $\alpha = 3.437471743421766$
9. $f_9(x) = e^{x^2+7x-30} - 1,$
   dengan $\alpha = 3.000000000000000.$

Dalam melakukan komputasi, kriteria pemberhentian iterasi yang digunakan adalah sama untuk semua metode, yaitu apabila:

- nilai mutlak errror $|x_n - \alpha| < toleransi,$
- nilai mutlak fungsi $|f(x_n)| < toleransi,$
- iterasi maksimum telah terpenuhi.

Dalam hal ini *toleransi* yang digunakan adalah sebesar 1×10^{-15} dan jumlah iterasi maksimum adalah sebanyak 100 iterasi.

Hasil komputasi dari metode yang dibandingkan disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Perbandingan Hasil Uji Komputasi untuk Beberapa Metode Iterasi

Persamaan Non-linear	x_0	*Itarasi (n)*				NOFE				COC			
		STN	SMN	SAN	SHN	STN	SMN	SAN	SHN	STN	SMN	SAN	SHN
$f_1(x)=0$	-0.5	8	7	8	14	32	28	32	56	4.00	4.00	4.00	4.03
	1.0	3	3	3	2	12	12	12	8	4.00	4.00	4.00	3.97
$f_2(x)=0$	1.0	3	3	3	3	12	12	12	12	3.99	3.99	3.99	4.00
	3.0	3	3	3	3	12	12	12	12	4.00	3.97	4.00	3.97
$f_3(x)=0$	2.0	3	3	3	3	12	12	12	12	4.00	4.00	4.00	4.00
	3.0	3	3	3	3	12	12	12	12	3.92	4.09	3.92	4.00
$f_4(x)=0$	1.0	2	2	2	2	8	8	8	8	3.80	3.95	3.80	3.98
	-0.3	3	3	3	3	12	12	12	12	3.98	3.98	3.98	4.00
$f_5(x)=0$	3.5	4	4	4	3	16	16	16	12	4.00	4.00	4.00	4.02
	2.5	3	3	3	3	12	12	12	12	4.00	4.00	4.00	4.00
$f_6(x)=0$	1.5	3	3	3	3	12	12	12	12	3.99	4.00	3.99	4.00
	3.0	3	3	3	3	12	12	12	12	4.00	4.00	4.00	4.00
$f_7(x)=0$	-2.0	4	4	4	4	16	16	16	16	3.99	4.00	3.99	4.00
	2.0	div	17	div	6	-	68	-	24	-	4.00	-	4.00
$f_8(x)=0$	3.5	3	3	3	3	12	12	12	12	4.00	4.00	4.00	4.00
	5.0	6	6	6	15*	24	24	24	60*	4.00	4.00	4.00	4.0*
$f_9(x)=0$	3.5	6	6	6	6	24	24	24	24	3.98	4.00	3.98	4.00
	3.25	5	4	5	4	20	12	20	20	4.00	3.99	4.00	4.00
Jumlah		65	63	65	62	260	248	260	252	67.65	67.97	67.65	67.97

Pada Tabel 1 di atas, untuk setiap metode yang dibandingkan dihitung ***n*** untuk banyak iterasi, **NOFE** untuk banyak fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya, dan **COC** untuk orde kekonvergenan komputasi. **div** menunjukkan bahwa metode divergen atau tidak menemukan akar dan (*) berarti metode konvergen tapi tidak ke akar yang telah ditetapkan. Sedangkan Jumlah adalah penjumlahan semua nilai (iterasi, NOFE, dan COC) yang diperoleh dari hasil komputasi kecuali hasil komputasi untuk persamaan nonlinear ke-7 dengan tebakan awal $x_0 = 2.0$.

Secara umum hasil komputasi menunjukkan bahwa semua metode memiliki orde kekonvergenan empat. Untuk beberapa kasus metode juga cukup sensitif terhadap tebakan awal, artinya apabila tebakan awal cukup jauh dari akar maka jumlah iterasi akan bertambah atau bahkan divergen.

Dilihat dari banyak iterasi, metode **SMN** dan **SHN** lebih baik, akan tetapi untuk fungsi ke-8 dengan tebakan awal $x_0 = 5.0$ metode **SHN** konvergen ke akar lain. Sedangkan metode **STN** dan **SAN** adalah adalah dua metode yang sama tetapi dengan penamaan berbeda.

KESIMPULAN

Dalam artikel ini, kita telah mendisikusikan modifikasi sederhana dari varian metode Newton. Diawali dari ide Weerakoon dan Fernando (2000) yang berhasil menurunkan bentuk varian metode Newton yang memanfaatkan aturan Trapesium untuk mengaproksimasi integral yang muncul pada teorema Newton sehingga diperoleh metode Trapesium Newton yang memiliki orde kekonvergenan kubik yang lebih baik dari metode Newton.

Selanjutnya secara berturut-turut Ozban (2004) menggunakan aturan Midpoint untuk mendapatkan metode Midpoint Newton, rata-rata Aritmatik untuk mendapatkan metode Aritmatik Newton dan rata-rata Harmonik untuk mendapatkan metode Harmonik Newton. Seluruh metode ini juga memiliki orde kekonvergenan kubik.

Perkembangan selanjutnya, Jain (2013) menggunakan metode Secant dan Trapesium Newton secara bersama-sama dan berhasil menunjukkan metode Secant-Trapesium Newton (**STN**) ini memiliki orde kekonvergenan empat yang lebih baik dari metode Trapesium Newton. Metode ini memerlukan dua kali evaluasi fungsi dan dua kali evaluasi turunan pertama fungsi.

Menggunakan ide Jain di atas ternyata kombinasi metode Secant dan Midpoint Newton (**SMN**), metode Secant dan Aritmatik Newton (**SAN**) dan metode Secant dan Harmonik Newton (**SHN**) juga memiliki orde kekonvergenan empat.

Melalui uji komputasi, juga telah ditunjukkan bahwa semua metode yang dibandingkan memiliki orde kekonvergenan empat. Secara umum kedua metode iterasi yang diusulkan cukup sebanding dengan metode Secant-Trapesium Newton yang sebelumnya diusulkan Jain. Bahkan relatif lebih baik, terlihat dari hasil komputasi dimana untuk persamaan nonlinear $f_7(x) = 0$ dengan $x_0 = 2.0$ metode Secant-Trapesium Newton gagal tetapi Secant-Midpoint Newton dan Secant-Harmonik Newton sukses meskipun dengan iterasi yang cukup besar.

Karena semua metode masih menggunakan metode Newton untuk perhitungan awal iterasi, maka semua metode juga cukup sensitif terhadap tebakan awal artinya apabila tebakan awal cukup jauh dari akar maka jumlah iterasi akan bertambah.

DAFTAR PUSTAKA

Atkinson. K.E. (1989). ***An Introduction to Numerical Analysis***, second ed. John Wiley & Sons. New York.

Frontini M. & Sormani E. (2003). **Some variants of Newton's method with third-order convergence**, *Appl. Math. Comput*. 140, 419–426.

Jain, D. (2013). **Family of Newton-like methods with fourt-order convergence**. *International of Journal Computer Mathematics*. DOI: 10.1080/ 00207160.2012.746670.

Mathew, J.H. (1987). ***Numerical Method for Mathematical, Science, and Engineer***. Prentice-Hall Internasional. U.S.A.

Ozban, A.Y. (2004). **Some New Variants of Newton's Methods.** ***Applied Mathematics Letters***. *17*, 677-682.

Steffensen, J.F. (1933). **Remarks on iteration**. Skand. *Aktuarietidskr*. 16: 64-72.

Supriadi, P. (2013). **Metode Secant-Midpoint Newton untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear**. *Sedang proses terbit*.

Weerakoon, S. & Fernando, T. G. I. (2000). **A variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence.** ***Applied Mathematics*** *Letters*. 13: 87–93.